Электротехника.
Домашняя работа № 2.
Образец выполнения.

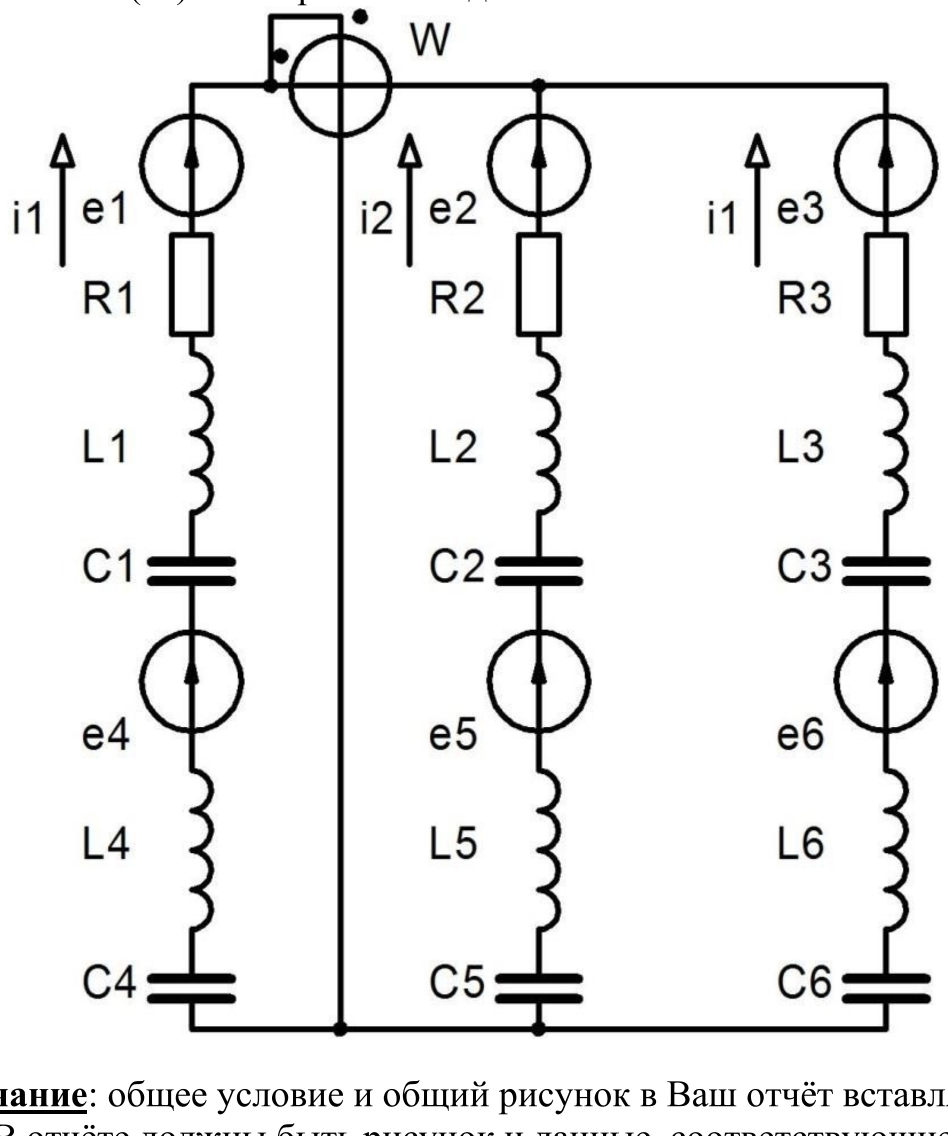
Общее условие для всех вариантов

Для схемы, соответствующей Вашему варианту, выполнить следующее:

1. По законам Кирхгофа составить систему уравнений для расчёта токов во всех ветвях, записав её в двух формах:
   а) для мгновенных значений (дифференциальная форма);
   б) для комплексов (символическая форма).
2. Определить комплесы токов в ветвях любым методом.
3. Определить показание ваттметра двумя способами:
   а) с помощью выражения для комплексов тока и напряжения на ваттметре;
   б) по формуле UIcosφ.

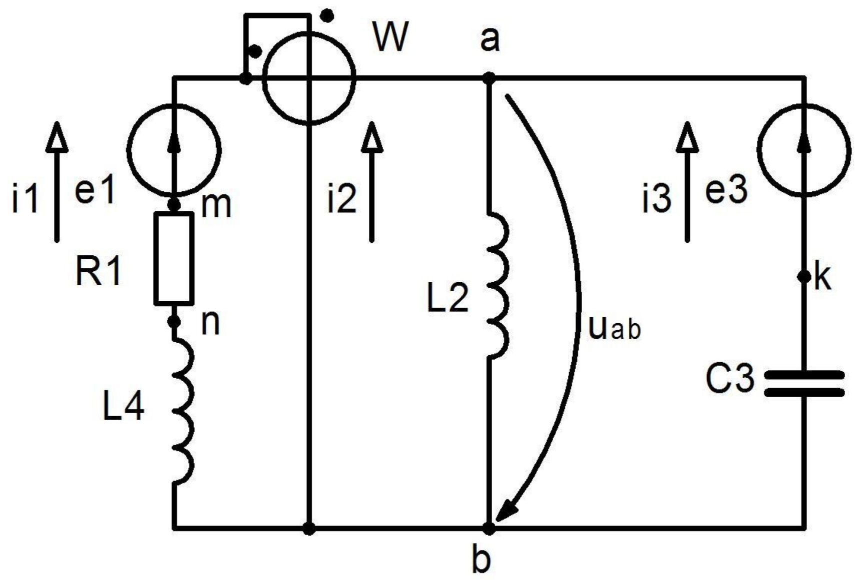
На векторной диаграмме тока и напряжения ваттметра указать угол φ=φu-φi.

4. Построить векторную топографическую диаграмму токов и напряжений.
5. Записать выражение для мгновенного значения тока i1 и построить график зависимости i1(ωt) в интервале от 0 до 2π.



Замечание: общее условие и общий рисунок в Ваш отчёт вставлять необязательно! В отчёте должны быть рисунок и данные, соответствующие Вашему варианту.

РГР 2. Вариант N.



Дано: R1 = 42 Ом,
L2 = 0,59 Гн,
C3 = 76 мкФ,
L4 = 0,40 Гн,
Em1 = 51 В,
ψ1 = 70°,
Em3 = 99 В,
ψ3 = 200°,
f = 63 Гц.

Рис. 1.

Замечание: Все расчёты будем проводить в основных единицах. Тогда результаты тоже будут выражены в основных единицах, и размерность будем писать только в конце.

Предварительные расчёты

Прежде, чем приступать к выполнению поставленных задач, выполним некоторые подготовительные действия:

Вычисление комплексов э.д.с. ветвей

По условию для каждой э.д.с. заданы амплитуда Em и начальная фаза ψ. Чтобы записать комплексы э.д.с. $\underline{E}$, нужно для каждой э.д.с. вычислить ещё действующее значение E, действительную $\mathrm{Re}\underline{E}$ и мнимую $\mathrm{Im}\underline{E}$ части:

$$\underline{E} = \mathrm{Re}\underline{E} + j\mathrm{Im}\underline{E} = \mathrm{E}e^{\,j\psi}$$

$$\mathrm{E} = \frac{\mathrm{Em}}{\sqrt{2}} \qquad \mathrm{Re}\underline{E} = \mathrm{E}\cos\psi \qquad \mathrm{Im}\underline{E} = \mathrm{E}\sin\psi$$

Для наших данных получим:

$$\mathrm{E}_1 = \frac{51}{\sqrt{2}} = 36{,}1 \qquad \mathrm{Re}\underline{E_1} = 36{,}1\cos 70° = 12{,}33 \qquad \mathrm{Im}\underline{E_1} = 36{,}1\sin 70° = 33{,}9$$

$$\mathrm{E}_3 = \frac{99}{\sqrt{2}} = 70{,}0 \qquad \mathrm{Re}\underline{E_3} = 70{,}0\cos 200° = -65{,}8 \quad \mathrm{Im}\underline{E_3} = 70{,}0\sin 200° = -23{,}9$$

Вычисление полных комплексных сопротивлений ветвей

Полное комплексное сопротивление ветви определяется по формуле:

$$\underline{Z} = R + jX = R + j(X_{\,L} - X_C)$$

где

R – активное сопротивление ветви;
$\mathrm{X} = \mathrm{X_L} - \mathrm{X_C}$ – реактивное сопротивление;
$\mathrm{X}_L = \omega\mathrm{L}$ – реактивное индуктивное сопротивление;
$\mathrm{X}_C = \frac{1}{\omega C}$ – реактивное ёмкостное сопротивление;

$\omega = 2\pi f$ – угловая частота.

Подставив числовые значения, получим:

$$\underline{Z_1} = R_1 + j\omega L_4 = R_1 + jX_{L4} = 42{,}0 + 158{,}3j$$

$$\underline{Z_2} = j\omega L_2 = jX_{L2} = 234j$$

$$\underline{Z_3} = \frac{1}{j\omega C_3} = -jX_{C3} = -33{,}2j$$

Все сопротивления получены в Омах.

1. По законам Кирхгофа составить систему уравнений для расчёта токов во всех ветвях, записав её в двух формах:

а) для мгновенных значений (дифференциальная форма):

При составлении уравнений по законам Кирхгофа в дифференциальной форме нужно помнить связь между токами и напряжениями на отдельных элементах для мгновенных значений:

для активного сопротивления:

$$u = R \bullet i$$

для индуктивности:

$$u = L \bullet \frac{di}{dt}$$

для ёмкости:

$$u = \frac{1}{C} \bullet \int i\,dt$$

Отметим для удобства три дополнительные точки: m, n и k (см. рис. 1), не являющиеся узлами.

Данная цепь (рис. 1) имеет 3 ветви и 2 узла (a и b). Поэтому необходимо составить систему трёх уравнений с тремя неизвестными. Одно уравнение составим по 1-му закону Кирхгофа, два – по второму:

уравнение для узла a:

$$i_1 + i_2 + i_3 = 0$$

уравнение для левого контура abnma:

$$-L_2 \bullet \frac{di_2}{dt} + L_4 \bullet \frac{di_1}{dt} + R_1 \bullet i_1 = e_1$$

уравнение для правого контура akba:

$$-\frac{1}{C_3} \bullet \int i_3\,dt + L_2 \bullet \frac{di_2}{dt} = -e_3$$

Таким образом, получаем систему 3 интегро-дифференциальных уравнений с 3 неизвестными токами i_1, i_2, i_3:

$$\begin{cases} i_1 + i_2 + i_3 = 0 \\ -L_2 \bullet \dfrac{di_2}{dt} + L_4 \bullet \dfrac{di_1}{dt} + R_1 \bullet i_1 = e_1 \\ -\dfrac{1}{C_3} \bullet \int i_3\, dt + L_2 \bullet \dfrac{di_2}{dt} = -e_3 \end{cases}$$

b) для комплексов (символическая форма):

Связь между комплексами токов и напряжений на отдельных элементах имеет вид:

для активного сопротивления:

$$\underline{U} = R \bullet \underline{I}$$

для индуктивности:

$$\underline{U} = j\omega L \bullet \underline{I} = jx_L \underline{I}$$

для ёмкости:

$$\underline{U} = \frac{1}{j\omega C} \bullet \underline{I} = -jx_C \underline{I}$$

уравнение для узла a:

$$\underline{I_1} + \underline{I_2} + \underline{I_3} = 0$$

уравнение для левого контура akba:

$$-jx_{L2}\underline{I_2} + jx_{L4}\underline{I_1} + R_1\underline{I_1} = \underline{E_1}$$

уравнение для правого контура amnbka:

$$-(-jx_{C3}\underline{I_3}) + jx_{L2}\underline{I_2} = -\underline{E_3}$$

Получаем систему 3 уравнений с 3 неизвестными токами: $\underline{I_1}$, $\underline{I_2}$, $\underline{I_3}$:

$$\begin{cases} \underline{I_1} + \underline{I_2} + \underline{I_3} = 0 \\ -jx_{L2}\underline{I_2} + jx_{L4}\underline{I_1} + R_1\underline{I_1} = \underline{E_1} \\ -(-jx_{C3}\underline{I_3}) + jx_{L2}\underline{I_2} = -\underline{E_3} \end{cases}$$

2. Определить комплексы токов в ветвях любым методом.

Поскольку данная цепь (рис. 1) имеет 2 узла (a и b), для её расчёта воспользуемся методом двух узлов.

В общем случае уравнение для комплекса междуузлового напряжения имеет вид:

$$\underline{U_{ab}} = \frac{\sum_k \dfrac{\pm\underline{E_k}}{\underline{Z_k}}}{\sum_n \dfrac{1}{\underline{Z_n}}}$$

где в числителе стоит сумма по всем активным ветвям, а в знаменателе – по всем ветвям. Знак «+» в числителе выбирается, если э.д.с. направлена против междуузлового напряжения $\underline{U_{ab}}$.

Для рассматриваемой цепи (рис. 1) получим:

$$\underline{U_{ab}} = \frac{\frac{\underline{\underline{E_1}}}{\underline{Z_1}} + \frac{\underline{\underline{E_3}}}{\underline{Z_3}}}{\frac{1}{\underline{Z_1}} + \frac{1}{\underline{Z_2}} + \frac{1}{\underline{Z_3}}}$$

Подставляя числовые значения, получим:

$$\underline{U_{ab}} = -96{,}1 - 54{,}8j$$

Токи в ветвях найдём по закону Ома для активной ветви:

$$\underline{I_1} = \frac{\underline{\underline{E_1}} - \underline{\underline{U_{ab}}}}{\underline{Z_1}} = 0{,}693 - 0{,}501j$$

$$\underline{I_2} = \frac{\underline{\underline{E_5}} - \underline{\underline{U_{ab}}}}{\underline{Z_2}} = 0{,}235 - 0{,}412j$$

$$\underline{I_3} = \frac{\underline{\underline{E_3}} - \underline{\underline{U_{ab}}}}{\underline{Z_3}} = -0{,}927 + 0{,}913j$$

3. *Определить показание ваттметра двумя способами:*

a) с помощью выражения для комплексов тока и напряжения на ваттметре:

Активная мощность P двухполюсника, характеризуемого комплексом тока $\underline{I}$ и комплексом напряжения $\underline{U}$, определяется выражением:

$$P = Re(\underline{U} \bullet \underline{\tilde{I}})$$

где $\underline{\tilde{I}}$– сопряжённый комплекс тока, $Re\underline{Z}$ – действительная часть числа $\underline{Z}$.

Ваттметр на рис. 1 включён так, что измеряет активную мощность участка (двухполюсника), расположенного справа от ваттметра. Комплекс тока этого двухполюсника $\underline{I_1}$, комплекс напряжения $\underline{U_{ab}}$.

Подставив числовые значения, получим:

$$P = Re\,((-96{,}1 - 54{,}8j) \bullet (0{,}693 + 0{,}501j)) = -39{,}2\ (\text{Вт})$$

b) по формуле UIcosφ:

Стрелка ваттметра отклоняется на величину, равную UIcosφ, где U - действующее напряжения на обмотке напряжения ваттметра, I – действующее значение тока, втекающего в обмотку тока ваттметра, φ – угол сдвига фаз между током и напряжением.

В рассматриваемом случае (рис. 1) напряжение на обмотке напряжения ваттметра u_{ab}, ток, втекающий в обмотку тока i_1. Действующие значения:

$$U_{ab} = |\underline{U_{ab}}| = |-96{,}1 - 54{,}8j| = 110{,}6\ (\text{В})$$

$$I_1 = |\underline{I_1}| = |0{,}693 - 0{,}501j| = 0{,}855\ (\text{А})$$

Угол сдвига фаз между током и напряжением φ равен разности начальных фаз напряжения и тока:

$$\varphi = \psi_{Uab} - \psi_{I1} = \mathrm{arctg}\frac{\mathrm{Im}\underline{U}_{ab}}{\mathrm{Re}\underline{U}_{ab}} - \mathrm{arctg}\frac{\mathrm{Im}\underline{I}_1}{\mathrm{Re}\underline{I}_1} = \mathrm{arctg}\frac{-54{,}8}{-96{,}1} - \mathrm{arctg}\frac{-0{,}501}{0{,}693} =$$
$$= 245°$$

Тогда активная мощность:

$$P = U_{ab} \bullet I_1 \bullet \cos\varphi = 110{,}6 \bullet 0{,}855 \bullet \cos 245° = -39{,}2\ (\text{Вт})$$

На векторной диаграмме тока и напряжения ваттметра указать угол φ=φu-φi.

На комплексной плоскости построим векторы $\underline{U}_{ab}$ и $\underline{I}_1$.

Исходя из величин действующих значенийU_{ab} и I_1, выберем следующие масштабы для векторов напряжения и тока:

$m_I = 0{,}1\,\frac{A}{\text{см}}$; $m_U = 10\,\frac{B}{\text{см}}$

Векторная диаграмма изображена на рис. 2.

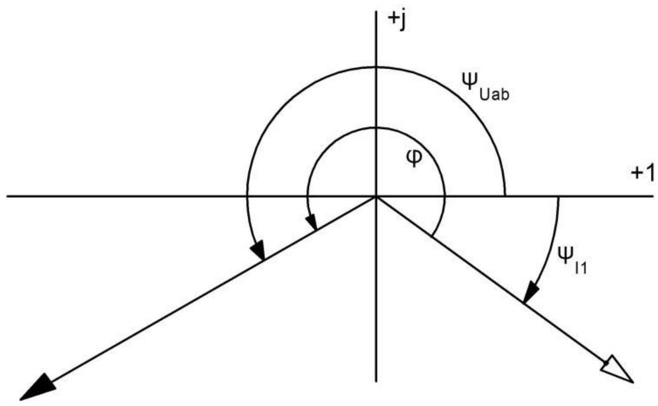


Рис. 2.

4. Построить векторную топографическую диаграмму токов и напряжений.

Векторная топографическая диаграмма токов и напряжений – это изображение на комплексной плоскости векторов всех токов и напряжений на всех элементах цепи. Причём векторы напряжений должны быть расположены в том же порядке, что и элементы цепи. Рекомендуется сначала разместить на комплексной плоскости точки, соответствующие комплексным потенциалом всех точек цепи, а потом соединить соседние точки. Тогда каждый отрезок диаграммы будет соответствовать элементу цепи.

Выберем за уровень отсчёта потенциала точку b на рис. 1: $\underline{\varphi_b} = 0$.

Тогда потенциалы остальных точек могут быть найдены путём подсчёта изменения потенциала при движении от точки b (или от других точек с известным потенциалом) к этим точкам. При выборе исходной точки и пути можно руководствоваться простотой расчётов.

$$\underline{\varphi}_a = \underline{\varphi}_b + \underline{U}_{ab} = \underline{U}_{ab} = -96{,}1 - 54{,}8j$$
$$\underline{\varphi}_n = \underline{\varphi}_b - jX_{L4} \bullet \underline{I}_1 = -jX_{L4} \bullet \underline{I}_1 = -79{,}4 - 109{,}7j$$
$$\underline{\varphi}_m = \underline{\varphi}_a - \underline{E}_1 = \underline{U}_{ab} - \underline{E}_1 = -108{,}5 - 88{,}7j$$
$$\underline{\varphi}_k = \underline{\varphi}_a - \underline{E}_3 = \underline{U}_{ab} - \underline{E}_3 = -30{,}3 - 30{,}8j$$

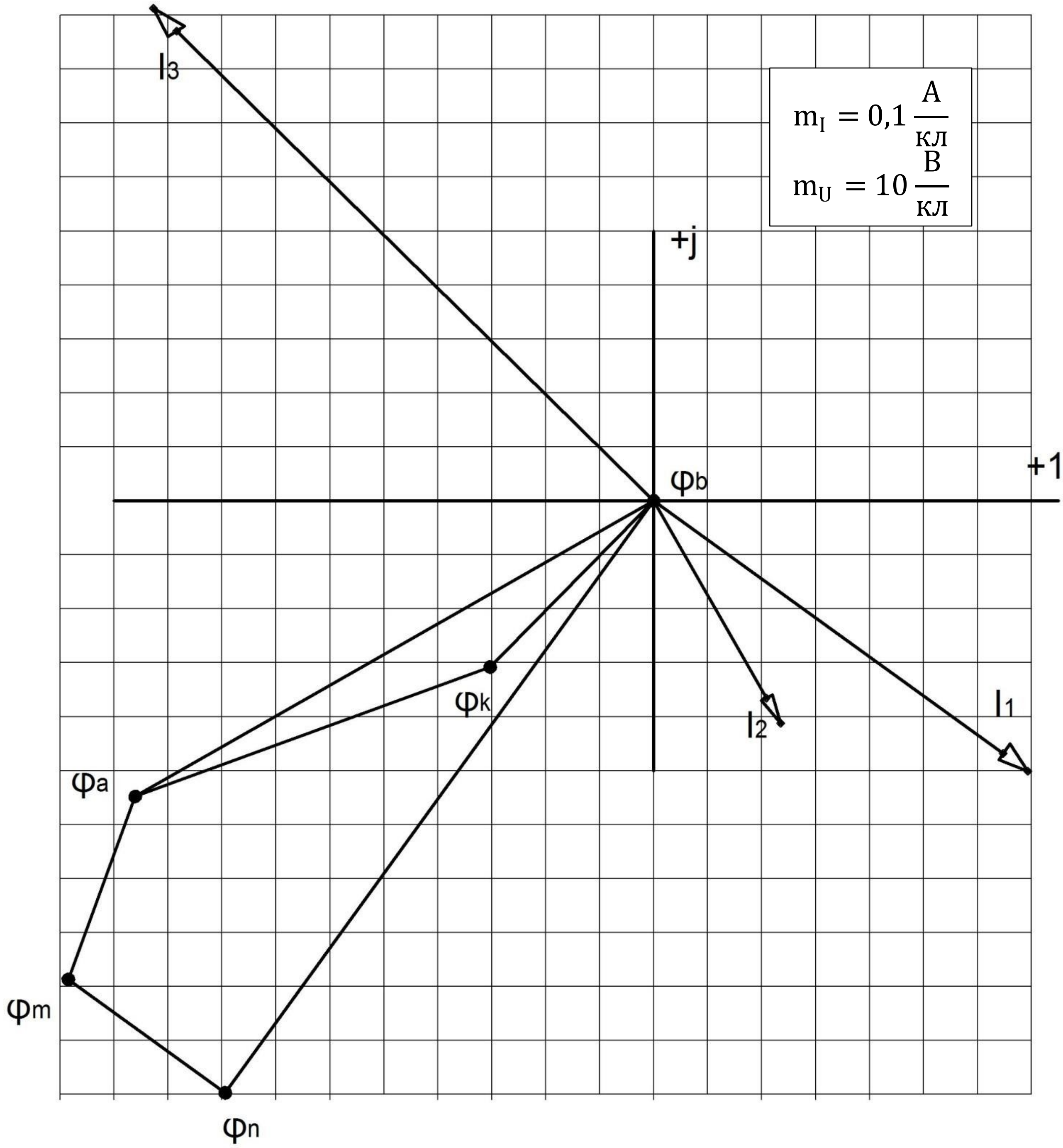


Рис. 3.

5. Записать выражение для мгновенного значения тока i1 и построить график зависимости i1(ωt) в интервале от 0 до 2π.

Выражение для мгновенного значения тока имеет вид:

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_I)$$

где

$I_m = \sqrt{2}I$ – амплитуда тока; $I_{m1} = \sqrt{2} \bullet 0{,}855 = 1{,}209$ (А);

I – действующее значение; $I_1 = 0{,}855$;

$\omega = 2\pi f$ – угловая частота;

ψ_I – начальная фаза тока; $\psi_{I1} = \mathrm{arctg}\frac{-0{,}501}{0{,}693} = -0{,}626$ (рад).

Замечание: если бы действительная часть тока была меньше нуля: $Re\underline{\mathrm{I}}_1 < 0$, тогда к начальной фазе необходимо было бы добавить π.

Итак, получаем:

$$\mathrm{i}_1 = 1{,}209 \sin(\,\omega t - 0{,}626)$$

График этой функции имеет вид: